

1. Définition d'un treillis

On appelle système réticulé ou treillis, une structure formée d'un assemblage de barres rectilignes reliées entre elles par des articulations. Ces liaisons sont appelées des nœuds.

Les figures 1 et 2 montrent des exemples de réalisation de treillis.

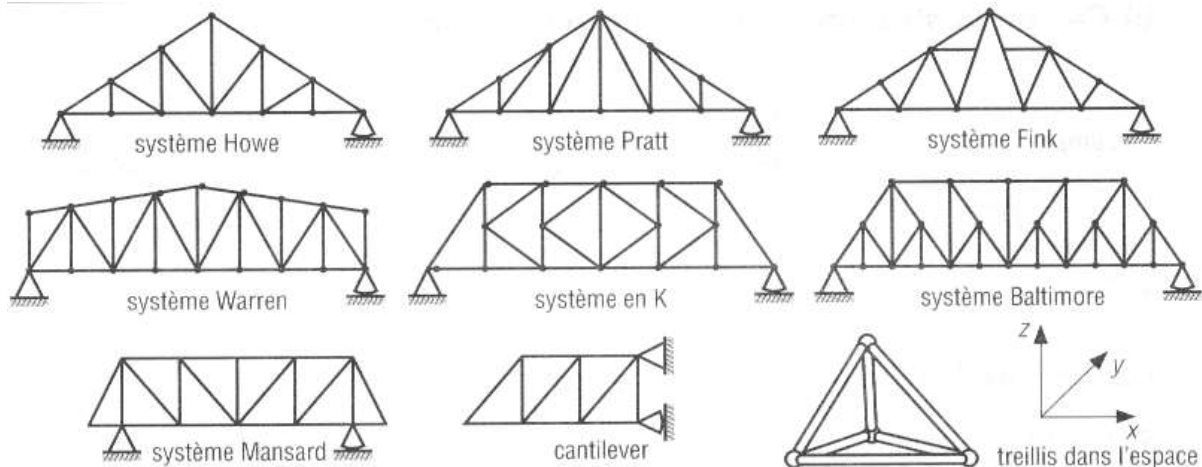


Fig.1- Exemple de treillis

Lorsque toute la géométrie est dans un même plan (au décalage près entre les barres due à la réalisation pratique des nœuds) et que les efforts appliqués sont dans ce plan, le treillis est dit plan (Fig.2).

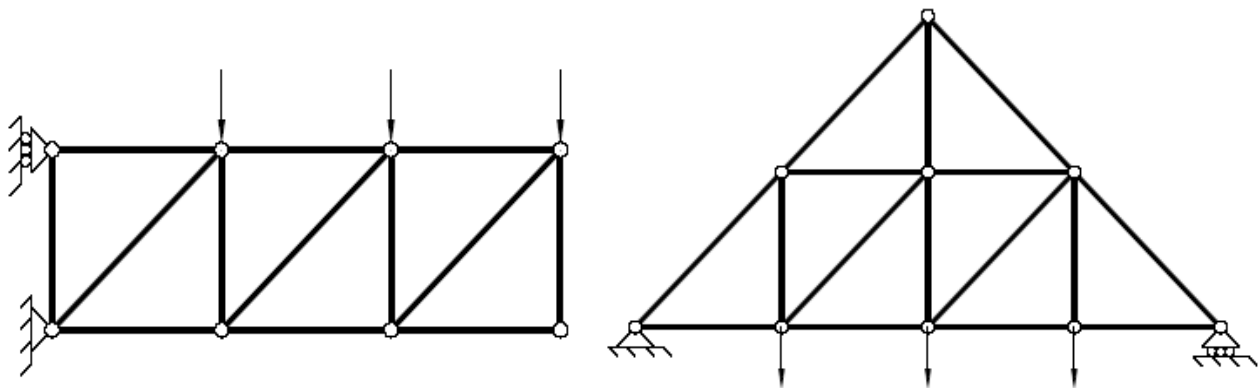


Fig.2- Exemples de treillis plans.



- On appelle nœud une articulation entre plusieurs barres. La figure 3 présente le détail de la réalisation pratique d'un nœud de treillis.

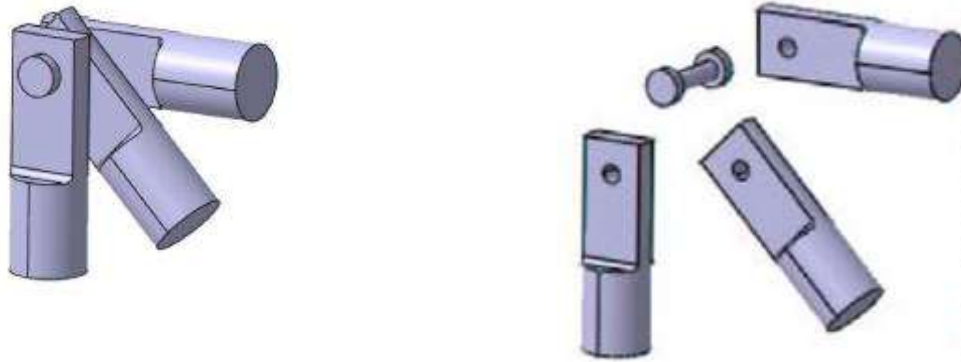


Fig.3- Détails d'un nœud.

2. Objectifs

Déterminer les efforts exercés dans les barres, en vue de leur dimensionnement, au moyen d'hypothèses simplificatrices.

Hypothèses simplificatrices :

- On considère les barres rectilignes et indéformables,
- Les efforts exercés sur la structure sont appliqués uniquement sur les nœuds, (pas de charges sur les barres).
- On néglige le poids des barres,

Remarque :

Une barre articulée à ses deux extrémités est appelée biellette et n'est soumise qu'à de l'effort normal. Les barres sont par conséquent soumises à de la traction ou de la compression.

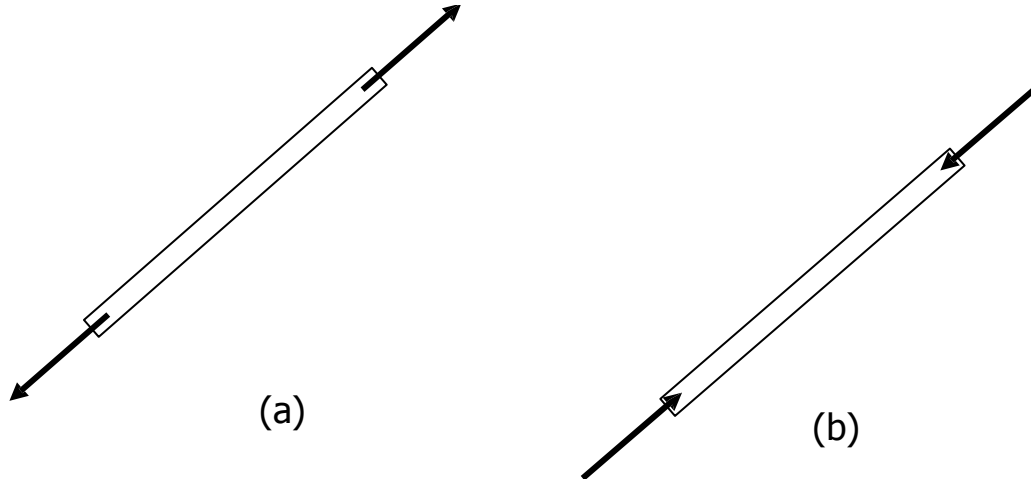
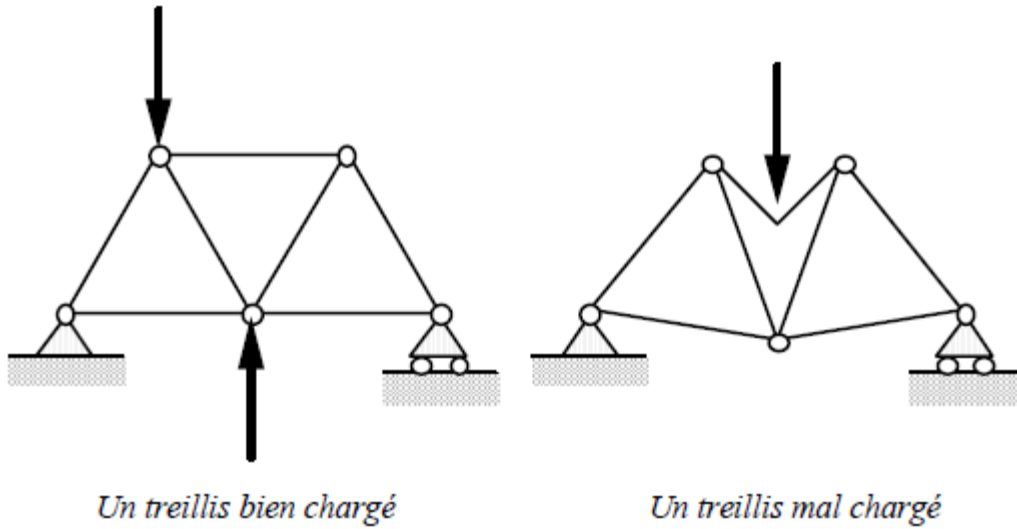


Fig.4- Barre sollicitée: (a) en traction, (b) en compression.

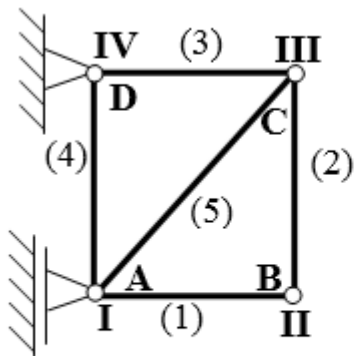
3.4. Isostaticité

Considérons un treillis constitué de n noeuds et de m barres. Il y a m inconnues d'efforts intérieurs (N_i , $i = 1, \dots, m$). Par ailleurs, supposons qu'il y ai p inconnues de liaison (X_A, Y_A, \dots). L'équilibre des n noeuds conduit à $2n$ équations.

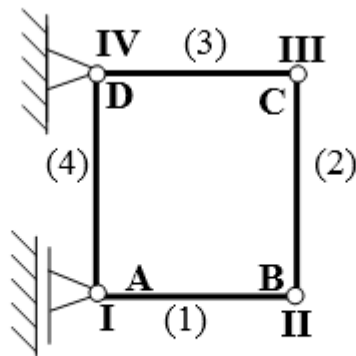


Trois situations peuvent alors se produire:

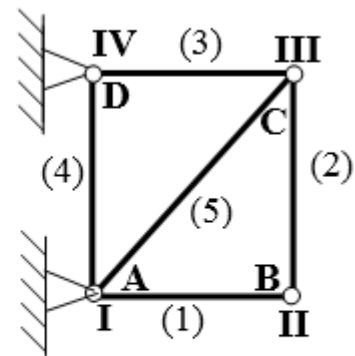
- Si $m + p = 2n$: le treillis est isostatique, c'est-à-dire que les efforts intérieurs peuvent être calculés et ne dépendent pas du comportement des barres. C'est par exemple le cas du treillis de la figure-a pour lequel $n=4$, $m=5$, $p=3$.
- Si $m+p < 2n$: le treillis possède des mobilités internes: il ne peut être en équilibre. C'est par exemple le cas du treillis de la figure-b pour lequel $n = 4$, $m = 4$ et $p = 3$.
- Si $m + p > 2n$: le treillis est dit hyperstatique c'est à dire que les efforts intérieurs ne pourront être calculés qu'après prise en compte de la déformation des barres (fig-c).



(a)



(b)



(c)

- Exemple d'un treillis: (a) isostatique, (b) mécanisme instable, (c) hyperstatique

4. Equilibre d'un treillis

4.1. Equilibre global du treillis

L'équilibre global du treillis (Fig.5) permet de calculer les réactions aux appuis

(Actions de liaison).

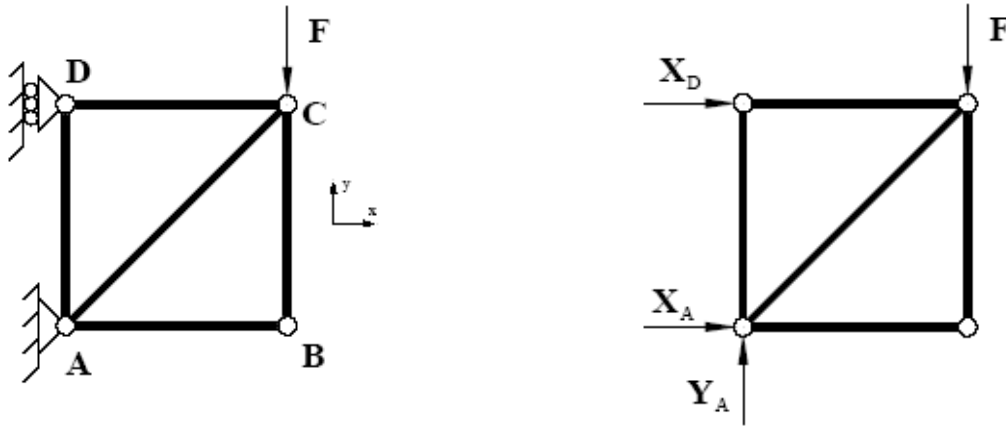


Fig.5- Equilibre global du treillis.

Par exemple, pour le treillis de la figure 4.5, l'équilibre des efforts donne:

$$\vec{F} + \vec{R}_A + \vec{R}_D = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} X_A + X_D = 0 \\ Y_A - F = 0 \end{cases} \quad (1)$$

et l'équilibre des moments (somme des moments par rapport au point A):

$$\Rightarrow LX_D + LF = 0$$

ce qui permet bien de calculer les réactions X_A , Y_A et X_D :

$$X_A = F ; X_D = -F ; Y_A = F$$

4.2. Equilibre d'une barre

L'écriture de l'équilibre d'une barre n'apporte aucune information supplémentaire. En effet, la barre n'étant sollicitée que par deux forces à ses extrémités, on sait déjà que ces efforts peuvent être exprimés à partir

de la tension T dans la barre. Cette tension est l'effort normal N , comme le montre la figure 6.

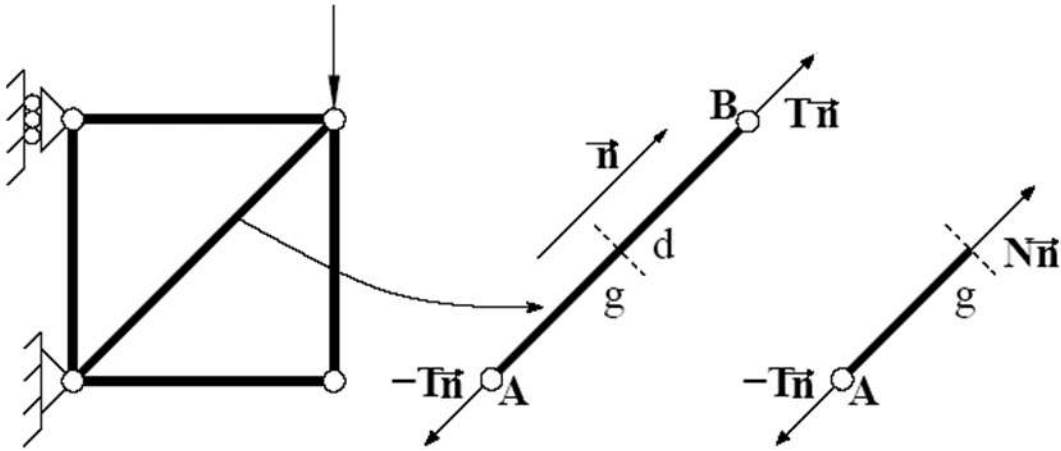


Fig.6- Equilibre d'une barre.

4.3. Equilibre des nœuds

La complexité d'un treillis ne provient pas de la complexité de ses éléments (les barres) mais plutôt de la complexité de l'arrangement des barres entre elles. C'est pourquoi, pour étudier l'équilibre d'un treillis, on réalise l'équilibre de chacun de ses nœuds. Comme le montre la figure 7, cet équilibre fait intervenir les efforts normaux de chacune des barres connectées au nœud isolé.

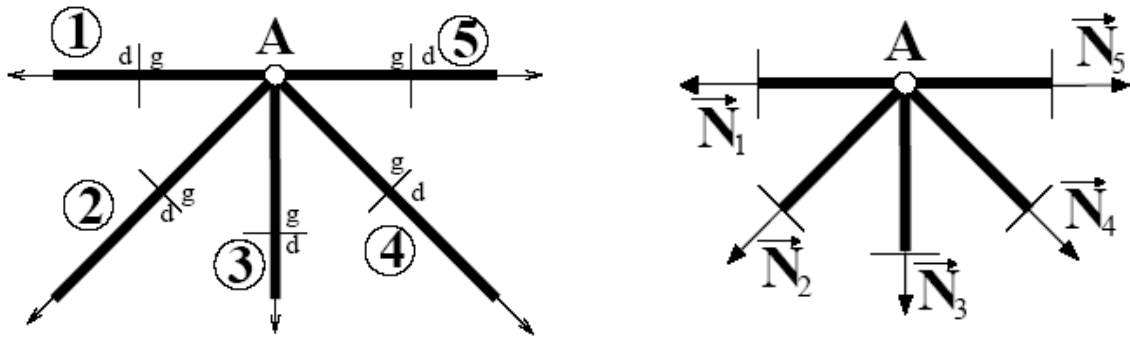


Fig.7- Equilibre d'un nœud.

Nous étudions ci-dessous l'équilibre du nœud **A** du treillis de la figure 7.

- **Equilibre du nœud A**

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 + \vec{N}_4 + \vec{N}_5 = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^5 F_{Xi} = 0 \\ \sum_{i=1}^5 F_{Yi} = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_4 + N_5 = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}N_2 - N_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_4 = 0 \end{cases}$$

- **Equilibre d'un nœud soumis à un effort**

Si le nœud est soumis à un effort extérieur donné (Fig.8), l'équilibre fait intervenir les composantes de cet effort.

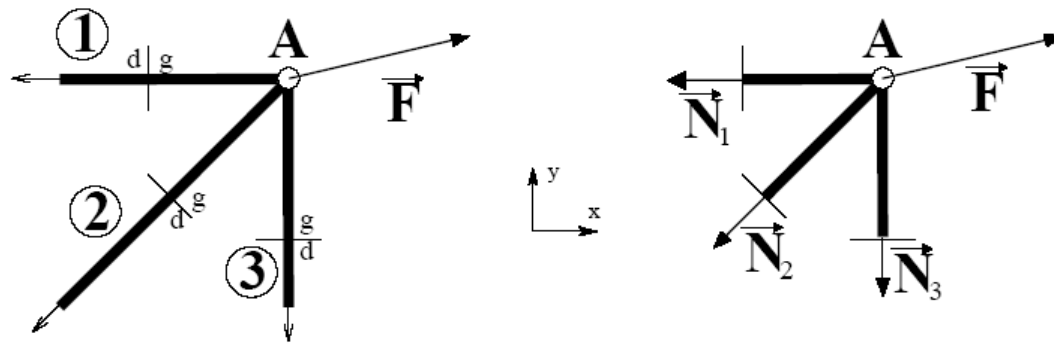


Fig.8- Equilibre d'un nœud soumis à un effort.

L'équilibre du nœud **A** de la figure.8 donne:

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 + F_x = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}N_2 - N_3 + F_y = 0 \end{cases}$$

- **Equilibre d'un nœud en appui fixe**

Si le nœud est en appui fixe (Fig.9), les deux inconnues de liaison interviennent dans les équations d'équilibre. Ces équations sont celles qui permettront de calculer les réactions aux appuis si celles-ci n'ont pas été obtenues par l'équilibre global du treillis:

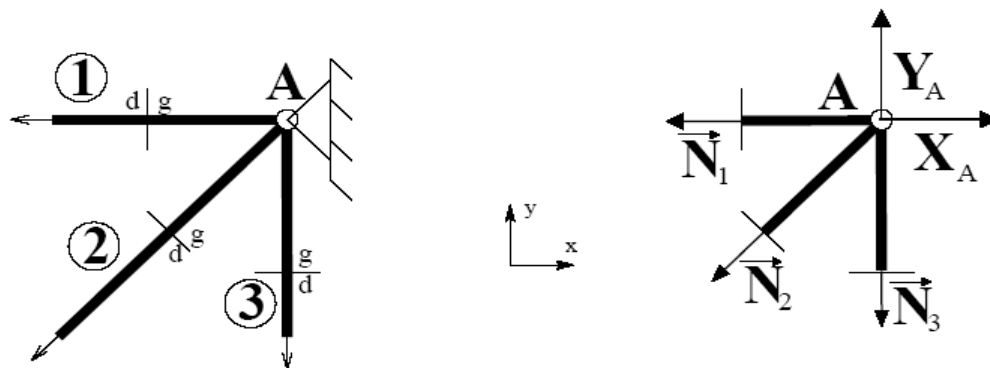


Fig.9- Equilibre d'un nœud en appui fixe.

L'équilibre du nœud **A** de la figure 9 permet d'écrire:

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 + \vec{R}_A = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 + X_A = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}N_2 - N_3 + Y_A = 0 \end{cases}$$

• Equilibre d'un nœud en appui mobile

Si le nœud est en appui mobile (Fig.10), l'inconnue de liaison intervient dans l'équation d'équilibre dont la direction correspond au blocage. Cette équation est celle qui permettra de calculer cette réaction si elle n'a pas été obtenue par l'équilibre global du treillis.

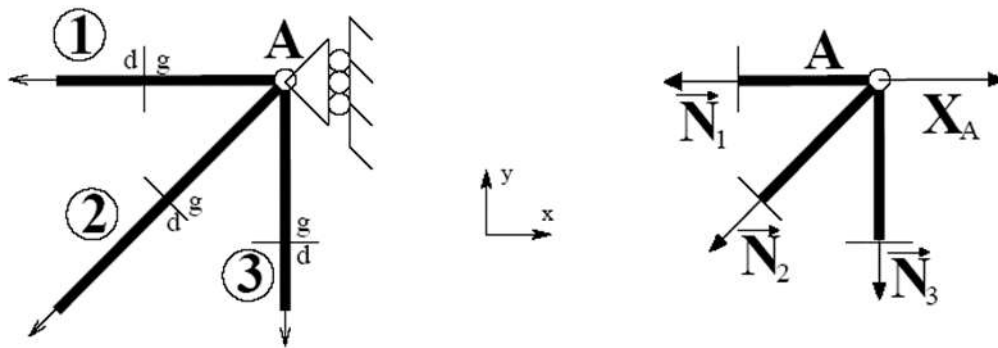


Fig. 10- Equilibre d'un nœud en appui mobile.

L'équilibre du nœud **A** de la figure 9 permet d'écrire:

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 + \vec{R}_A = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 + X_A = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}N_2 - N_3 = 0 \end{cases}$$

5. Analyse des treillis par la méthode des sections

La méthode des nœuds ci-dessus est un outil très pratique lorsqu'il s'agit de déterminer les efforts dans toutes les barres du treillis. Cependant, pour déterminer ou vérifier l'effort dans une barre quelconque, une autre méthode, appelée la méthode des sections est plus avantageuse.

Soit à déterminer, par exemple, l'effort dans la barre **BE** du treillis de la figure.11.

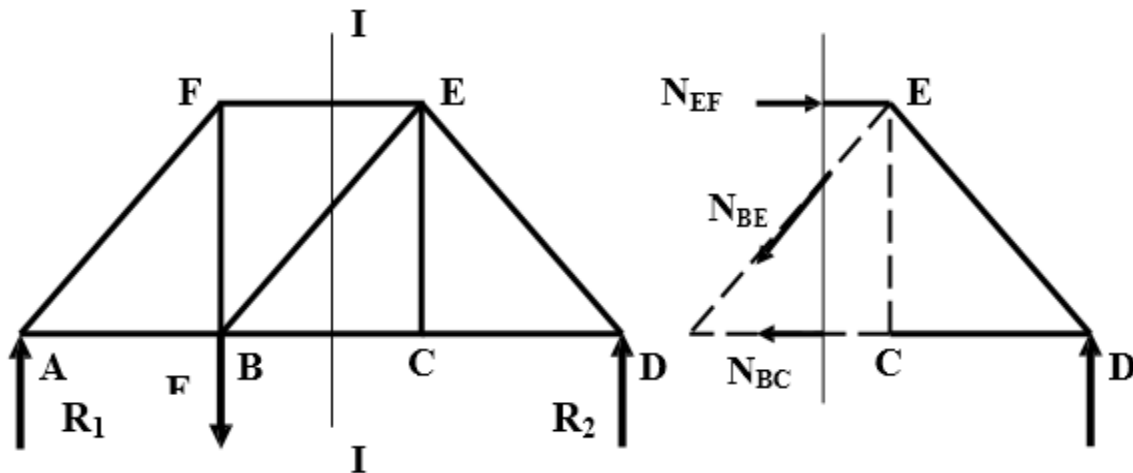


Fig.11- Treillis coupé par un plan.

- La méthode des sections consiste à séparer le treillis en deux parties par un plan de coupe et étudier l'équilibre de chaque partie comme un corps isolé.
- Pour le calcul des forces on peut traiter une partie ou l'autre, mais en général la partie où il y a moins de forces nous permet de calculer les forces plus facilement. Il n'est pas toujours possible de déduire le sens des forces; dans ce cas nous donnerons un sens arbitraire à ses forces. Un résultat positif confirme notre hypothèse de départ; par contre un résultat négatif nous indique que notre hypothèse de départ est incorrecte et dès lors le sens exact sera contraire à celui choisi.